1.4 Espaces de fonctions continues

1.4.1 Topologie de la convergence uniforme

1.4.1 DÉFINITION

Soient X un espace topologique et Y un espace métrique.On note $Appl(X,\ Y) = Y^X$ l'ensemble des applications X dans Y. On désigne par $\mathscr{B}(X, Y)$ l'ensemble des applications bornées X dans Y i.e. $f \in \mathscr{B}(X,\ Y)$ si $f(X)$ a un diamètre borné.

On munit $\mathscr{B}(X,\ Y)$ de la distance uniforme i.e. pour $f, g \in \mathscr{B}(X,\ Y)$

$$d_\infty(f,\ g) := \sup_{x\in X} d(f(x),\ g(x)).$$

Par définition, la topologie associée est celle de la *convergence uniforme*.

Il est clair que $(\mathscr{B}(X,\ Y),\ d_\infty)$ est un espace métrique. Par définition, la topologie associée est celle de la *convergence uniforme*. Le nom se justifie car une suite (f_n) converge vers f pour cette topologie si et seulement si $d_\infty(f_n, f)$ tend vers 0, soit si et seulement si $(f_n(x))$ converge uniformément vers $f(x)$ pour tout $x \in X$. On désigne par $\mathscr{BC}(X,Y) := \mathscr{B}(X,Y)\cap\mathscr{C}(X,Y) = \{f \in \mathscr{B}(X,\ Y) |\ f \text{ est continue sur } X\}$

1.4.2 PROPOSITION

L'espace $\mathscr{BC}(X,\ Y)$ est un fermé de $\mathscr{B}(X,\ Y)$; autrement dit toute limite uniforme d'applications continues et bornées est une application continue et bornée.

Démonstration: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{BC}(X,\ Y)$ et $f \in \mathscr{B}(X,\ Y)$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_\infty(f_n,\ f) = 0$.

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N(\varepsilon) > 0$ tel que $n \geq N$, entraîne $d_\infty(f_n,\ f) < \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $x_0 \in X$, comme f_N est continue, il existe un voisinage ouvert V_{x_0} de x_0 dans X tel que $f_N(V_{x_0}) \subset B(f_N(x_0), \frac{\varepsilon}{3})$. Il s'agit maintenant de montrer que $f(V_{x_0}) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$. Soit $y \in f(V_{x_0})$, alors il existe $x \in V_{x_0}$ tel que $y = f(x)$. D'où $d(f(x_0),\ f(x)) \leq d(f(x_0),\ f_N(x_0)) + d(f_N(x_0),\ f_N(x)) + d(f_N(x),\ f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, ainsi $f(V_{x_0}) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$. ■

La complétude de $\mathscr{B}(X,\ Y)$ et de $\mathscr{BC}(X,\ Y)$ ne dépend que de la complétude de (Y, d).

1.4.4 THÉORÈME

Si (Y, d) est un espace métrique complet alors il en va de même pour $\mathscr{B}(X,\ Y)$ et donc de $\mathscr{BC}(X,\ Y)$.

Démonstration: Remarquons d'abord que puisque $\mathscr{BC}(X,\ Y)$ est un fermé de $\mathscr{B}(X,\ Y)$ il suffit de montrer la complétude de $\mathscr{B}(X,\ Y)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{B}(X,\ Y)$. Pour chaque $x \in X$ fixé, puisque $d(f_n(x),\ f_m(x)) \leq d_\infty(f_n,\ f_m)$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (Y, d), par complétude, elle converge vers un élément de Y que nous noterons $f(x)$. Il s'agit maintenant de montrer que la fonction f, ainsi définie, appartient à $\mathscr{B}(X,\ Y)$ et $\lim_{n\to+\infty} d_\infty(f_n,\ f) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe $N(\varepsilon) > 0$ tel que $n, m \geq N(\varepsilon)$, entraîne $d(f_n(x),\ f_m(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in X$. Par passage à la limite lorsque n tends vers $+\infty$, on obtient :
pour tout $n \geq N(\varepsilon)$, et pour tout $x \in X$ on a $d(f_n(x),\ f(x)) \leq \varepsilon$.
Puisque $f_{N(\varepsilon)} \in \mathscr{B}(X,\ Y)$, il existe $y_1 \in Y$ et $R > 0$ tel que $f_{N(\varepsilon)}(X) \subset B(y_1, R)$. On en déduit, en utilisant l'inégalité triangulaire, que $f(X) \subset B(y_1, R+\varepsilon)$, donc $f \in \mathscr{B}(X,\ Y)$. Comme ε est arbitraire, on aura $\lim\limits_{n\to+\infty} d_\infty(f_n,\ f) = 0$. ∎

1.4.6 Remarque

Lorsque X est compact, toute fonction continue, $f : X \to Y$ est nécessairement bornée, dans ce cas $\mathscr{C}(X, Y) = \mathscr{BC}(X, Y)$.

La topologie de la convergence uniforme est plus fine que la topologie de la convergence simple, la réciproque n'est pas vraie, en général.

Il y a un cas important où la réciproque est vraie, c'est celui des sous-ensembles équicontinus de $\mathscr{C}(X, Y)$ lorsque X est compact.

L'un deux est donné par le théorème de Dini

1.4.7 Théorème (de Dini)

Soit X un espace topologique compact. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone de $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ qui converge simplement vers $f \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ i.e.

i) (f_n) est décroissante i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a, $f_{n+1} \leq f_n$
(ou bien (f_n) est croissante i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a, $f_n \leq f_{n+1}$)

ii) Pour tout $x \in X$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Démonstration: On va traiter le cas (f_n) décroissante, celui où (f_n) est croissante s'en déduit en passant à $-f_n$.
On pose $g_n = f_n - f$. Alors (g_n) est une suite décroissante de fonctions continues positives, qui converge simplement vers la fonction identiquement nulle 0. Il s'agit de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g_n\|_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in X} g_n(x) = 0$.
Si ce n'est pas vrai, il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout entier n, $\|g_n\|_\infty \geq \varepsilon$. On pose $F_n = \{x \in X \,|\, g_n(x) \geq \varepsilon\}$. Alors, (F_n) est suite décroissante de fermés non vides

du compact X.
En effet, comme les g_n sont continues, les ensembles $F_n = g_n^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$, sont fermés, de $g_{n+1} \leq g_n$, en déduit que $F_{n+1} \subset F_n$, et par continuité de g_n et compacité de X, il existe x_n tel que $g_n(x_n) = \|g_n\|_\infty \geq \varepsilon$, ainsi F_n est non vide. D'après, la propriété de l'intersection finie des compacts, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. Soit $a \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$, alors pour tout n, $g_n(a) \geq \varepsilon$, contredit la convergence simple de (g_n) vers 0. ■

1.4.9 REMARQUE

Le résultat est pris en défaut si l'une des hypothèses est omise :

1) X n'est pas compact :
par exemple, si $X =]0, +\infty[$ et $f_n(x) = \frac{1}{nx}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ qui converge simplement vers 0. Mais la convergence n'est pas uniformément puisque
$\|f_n\|_\infty \geq f_n(n) = 1$.
2) Si f n'est pas continue :
par exemple, si $X = [0, 1]$ et $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ qui converge simplement vers la fonction $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$. La convergence ne peut être uniformément puisque f n'est pas continue.
3) Si (f_n) n'est pas monotone :
par exemple si $X = [1, 0]$ et pour $n > 1$,
$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -(n+1)x + \frac{2(n+1)}{n} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, 0] \end{cases}$$
La suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0. Mais la convergence n'est pas uniformément puisque : $\|f_n\|_\infty = f_n(\frac{1}{n}) = 1$.

Un autre exemple où les topologie simple et uniforme coïncide est celui des parties équicontinues

1.4.2 Parties équicontinuités de $\mathscr{C}(X, Y)$

1.4.10 DÉFINITION
Soient X un espace topologique et Y un espace métrique. Une partie A de $\mathscr{C}(X, Y)$ est dite *équicontinue* en un point x_0 de X, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que $f(V_{x_0}) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$ pour tout $f \in A$ i.e.

$$\forall x \in V_{x_0},\ \forall f \in A,\ d(f(x),\ f(x_0)) < \epsilon.$$

Une partie A de $\mathscr{C}(X,\ Y)$ est dite équicontinue si elle est équicontinue en tout point de X.

1.4.11 DÉFINITION
Soient X, Y deux espaces métriques, d(resp. d') la distance sur $X(resp.Y)$. Une partie A de $\mathscr{C}(X,\ Y)$ est dite *uniformément équicontinue* si
$\forall\epsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall x,\ y \in X,\ \forall f \in A,\ d(x,\ y) < \eta \Rightarrow d'(f(x),\ f(y)) < \epsilon.$

1.4.12 EXEMPLE. 1) Toute partie finie de $\mathscr{C}(X, Y)$ est équicontinue, et un ensemble fini d'applications uniformément continues est uniformément équicontinu.

2) Si $B \subset A \subset \mathscr{C}(X,\ Y)$, où A est équicontinue (respectivement uniformément équicontinue), alors B l'est aussi.

1.4.13 EXEMPLE. Soient X, Y deux espaces métriques, d (resp. d') la distance sur $X(resp.Y)$, k et α deux nombres > 0. L'ensemble des applications (α-höldériennes) f de X dans Y telles que, pour tout couple (x, x') de points de X, on ait

$$d(x, x') \leq k\left(d'(f(x), f(x'))\right)^{\alpha}$$

est uniformément équicontinu.

Par exemple, l'ensemble des isométries de X sur une partie de Y est uniformément équicontinu.

Le théorème de Heine s'étend aux familles équicontinues.

1.4.14 THÉORÈME
Soient X *et* Y deux espaces métriques, avec X compact. Toute famille équicontinue d'applications de X dans Y est uniformément équicontinue.

Démonstration: Supposons par l'absurde qu'il existe $\epsilon > 0$ et des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telles que $d(x_n,\ y_n) \leq \dfrac{1}{n}$ et $d(f_n(x_n),\ f_n(y_n)) \geq \epsilon$. Par compacité, quitte à extraire, on peut supposer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même point x. L'équicontinuité de A au point x implique que si n est assez grand, alors $d(f_n(x_n),\ f_n(x)) < \dfrac{\epsilon}{2}$ et $d(f_n(y_n),\ f_n(x)) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Par inégalité triangulaire, on a donc, pour n assez grand,

$$d(f_n(x_n),\ f_n(y_n)) \leq d(f_n(x_n),\ f_n(x)) + d(f_n(x),\ f_n(y_n)) < \epsilon,$$

contradiction. ■

1.4.16 Exercice Si E et F sont des espaces vectoriels normés, alors l'espace vectoriel normé $\mathscr{L}(E,\ F)$ des *applications* linéaires continues de E dans F est un sous-ensemble de $\mathscr{C}(E,\ F)$. Montrer que les propriétés suivantes sur une partie A de $\mathscr{L}(E,\ F)$ sont équivalentes :

1. A est uniformément équicontinue ;
2. A est équicontinue ;
3. A est équicontinue en 0 ;
4. il existe $C \geq 0$ tel que pour tout u dans A , on ait $\|u\| \leq C$.

1.4.17 Proposition

Soient X un espace topologique compact, Y un espace métrique. Soit $\mathscr{A}$ une partie équicontinue de $\mathscr{C}(X,\ Y)$. Alors,

i) la topologie de la convergence uniforme et la topologie de la convergence simple, sont identiques sur $\mathscr{A}$.

ii) L'adhérence $\overline{\mathscr{A}}$ de $\mathscr{A}$ est une partie équicontinue.

iii) la topologie de la convergence uniforme et la topologie de la convergence simple, sont identiques sur $\overline{\mathscr{A}}$.

Démonstration: i) La topologie de la convergence uniforme est toujours plus fine que celle de la convergence simple (qui est la topologie produit sur Y^X), donc il suffit de montrer que toute partie de $\mathscr{A}$ qui est ouverte pour la convergence uniforme, est ouverte pour la topologie de la convergence simple. Pour cela, il suffit de montrer que toute boule ouverte $B_{d_\infty}(f,\ \varepsilon)$ dans $\mathscr{A}$ est un voisinage de son centre pour la topologie de la convergence simple.

Il suffit donc de trouver un pavé ouvert $P = p_{x_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap p_{x_n}^{-1}(U_n)$, où U_i voisinage ouvert de $f(x_i)$ contenant f et tel que $P \cap \mathscr{A}$ soit contenu dans $B_{d_\infty}(f,\ \varepsilon)$, c'est-à-dire

$$g \in \mathscr{A} \text{ et } \forall i \in \{1,\ \cdots,\ n\},\ g(x_i) \in U_i \Rightarrow d_\infty(f,\ g) < \varepsilon.$$

Pour tout $x \in X$, par équicontinuité il existe un voisinage ouvert V_x de x dans X tel que $g(V_x) \subset B(g(x),\ \frac{\varepsilon}{3})$ pour tout $g \in \mathscr{A}$. Par compacité de X, il existe $x_1,\ \cdots,\ x_n \in X$ tels que les $\bigcup_{i=1}^n V_{x_i} = X$. On pose $U_i = B(f(x_i),\ \frac{\varepsilon}{3})$. Soit $g \in \mathscr{A}$ telle que pour tout $i = 1,\ \cdots,\ n$ on ait $g(x_i) \in U_i$ c'est-à-dire $d(f(x_i),\ g(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $x \in X$, il est dans un certain V_{x_i} donc $d(f(x),\ f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$ et $d(g(x),\ g(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Donc

$$\begin{aligned} d(f(x),\ g(x)) &\leq d(f(x),\ f(x_i)) + d(f(x_i),\ g(x_i)) + d(g(x_i),\ g(x)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

En passant au sup sur x, on a donc $d_\infty(f,\ g) < \varepsilon$.

ii) Soit $a \in X$ et $\epsilon > 0$. Par équicontinuité de $\mathscr{A}$, il existe un voisinage ouvert V_a de a dans X tel que $g(V_a) \subset B(g(a), \frac{\varepsilon}{3})$ pour tout $g \in \mathscr{A}$.
Soit $f \in \overline{\mathscr{A}}$. Soit $x \in V_a$, alors

$$U_x = \{g \in \mathscr{C}(X,Y) \mid d(f(a),g(a) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } d(f(x),f(x) < \frac{\varepsilon}{3}\}$$

qui est un ouvert voisinage de f pour le topologie simple, doit rencontrer $\mathscr{A}$. Soit $g \in \mathscr{A} \cap U_x$. Alors

$$d(f(x),f(a)) \leq d(f(x),g(x)) + d(g(x),g(a)) + d(g(a,f(x)) < \varepsilon.$$

Comme, x est arbitraire dans V_a et f est arbitraire dans $\overline{\mathscr{A}}$, on a montré ainsi que $\overline{\mathscr{A}}$ est équicontinue.

iii) Ensuite, d'après i), la topologie de la convergence simple coincide sur $\overline{(\mathscr{A})}_{\text{simple}}$ avec celle de la convergence uniforme. Donc l'adhérence $\overline{(\mathscr{A})}_{\text{uniforme}}$ pour la topologie uniforme est égale à $\overline{(\mathscr{A})}_{\text{simple}}$.

1.4.3 Théorème d'Arzéla-Ascoli

Dans cette partie on va décrire des compacts dans les espaces de fonctions continues entre deux espaces topologiques.

L'intérêt de l'équicontinuité vient du fait que toute partie compacte de $\mathscr{C}(X, Y)$ pour la topologie de la convergence uniforme est équicontinue.

1.4.19 Définition (Compacité relative)
Soit $K \subset X$ une partie d'un espace topologique. On dit qu'elle est *relativement compacte* si son adhérence est compacte. Si X est séparé, ceci équivaut à : K est contenu dans un compact. Si X est métrisable, ceci équivaut à : toute suite dans K a une sous-suite qui converge dans X.

Par exemple, une partie de $\mathbb{R}^n$ est relativement compacte si et seulement si elle est bornée.

1.4.20 Proposition
Soient X un espace topologique, Y un espace métrique, et $\mathscr{A}$ une partie d'adhérence compacte de $\mathscr{C}(X, Y)$ pour la topologie de la convergence uniforme. Alors

i) $\mathscr{A}$ est équicontinue

ii) pour tout x dans X, l'ensemble $\mathscr{A}(x) = \{f(x) : f \in \mathscr{A}\}$ est relativement compacte (i.e. d'adhérence compacte) dans Y.

Démonstration: Nous pouvons supposer $\mathscr{A}$ compacte, quitte à la remplacer par son adhérence, puisque toute partie d'une famille équicontinue est équicontinue, et toute partie d'un sous-espace d'adhérence compacte est d'adhérence compacte (tout fermé d'un compact est compact). Par continuité de l'application valuation en x, $f \mapsto f(x)$, et puisque Y est séparé, la partie $\mathscr{A}(x)$ est alors compacte, ce qui montre le second point. Montrons que $\mathscr{A}$ est équicontinue. Par compacité (et métrisabilité, restriction de la distance uniforme d_∞) de $\mathscr{A}$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe des éléments $f_1, \ldots, f_n$ dans A tels que pour tout f dans $\mathscr{A}$, il existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $d_\infty(f, f_{i_0}) < \frac{\epsilon}{3}$. Soit $x \in X$. Comme f_i est continue en x, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V_i de x tel que pour tout y dans V_i, on ait $d(f_i(y), f_i(x)) < \frac{\epsilon}{3}$. Donc par inégalité triangulaire, pour tout $y \in V_1 \cap \cdots \cap V_n$ (qui est un voisinage de x), pour tout $f \in$, il existe alors $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, tel que

$$d(f(y), f(x)) \leq d(f(y), f_{i_0}(y)) + d(f_{i_0}(y), f_{i_0}(x)) + d(f_{i_0}(x), f(x)) < \epsilon.$$

D'où $\mathscr{A}$ est équicontinu. ∎

1.4.22 THÉORÈME (THÉORÈME D'ARZELA-ASCOLI)
Soient X un espace topologique compact et Y un espace métrique. Soit une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{C}(X, Y)$ telle que

i) $\mathscr{A}$ est équicontinue,

ii) pour tout x dans X, l'ensemble $\mathscr{A}(x) = \{f(x) : f \in \mathscr{A}\}$ est relativement compacte dans Y.

Alors A est relativement compacte dans $\mathscr{C}(X, Y)$ pour la topologie de la convergence uniforme. Autrement dit, toute suite dans $\mathscr{A}$ a une sous-suite convergeant uniformément.

Démonstration: La compacité des $\overline{\mathscr{A}(x)}$ et le théorème de Tychonov impliquent que

$$\{f \in Y^X \mid \forall x \in X,\ f(x) \in \overline{\mathscr{A}(x)}\}$$

est compact pour la topologie de la convergence simple. Or cet ensemble contient $\overline{(\mathscr{A})}_{\text{simple}}$, donc ce dernier est compact pour cette topologie. D'après 1.4.17, $\overline{(\mathscr{A})}_{\text{simple}} = \overline{(\mathscr{A})}_{\text{uniforme}}$, et la topologie simple coincide avec la topologie uniforme. Donc $\overline{(\mathscr{A})}_{\text{uniforme}}$ est compact, c'est-à-dire $\mathscr{A}$ est relativement compacte pour la topologie uniforme.

1.4.24 COROLLAIRE
Si X est un espace topologique compact et Y est un espace métrique compact, alors les parties de $\mathscr{C}(X, Y)$, qui sont d'adhérence compacte pour la topologie de la convergence uniforme, sont exactement les parties équicontinues.

1.4.25 EXEMPLE. Soit $A = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dans $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ formée des translations $f_n : t \mapsto t+n$. L'ensemble des f_n est équicontinu (tous ses élements sont des isométries) ; mais l'ensemble des images de 0 par les f_n, qui est $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, n'est pas borné ; et la suite des f_n n'a pas de sous-suite convergente dans $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, donc A n'est pas relativement compacte. On peut voir ceci directement, puisque $d_\infty(f_n, f_m) = |n-m| \geq 1$, si $n \neq m$.

Par contre, $B = (f_a)_{a\in[2,3]}$, la suite dans $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ formée des translations $f_a : t \mapsto t+a$ est relativement compacte dans $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, d'après le théorème d'Arzela-Ascoli.

1.4.4 Approximation et séparabilité. Théorème de Stone-Weierstrass

Soient X un espace topologique compact et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans ce paragraphe, nous minissons $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ de la topologie de la convergence uniforme.

Une partie A de $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ est dite séparante si

$$\forall x,\ y \in X,\ \exists f \in A,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Rappelons que $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$ pour les opérations d'addition point par point, de multiplication point par point et de multiplication par un scalaire point par point des fonctions. Une partie de $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ est une *sous-algèbre unitaire* si elle est stable par ces opérations, et contient la fonction constante 1, donc toutes les constantes.

1.4.26 THÉORÈME (THÉORÈME DE STONE-WEIERSTRASS (VERSION RÉELLE))
Soit X un espace topologique compact. Toute sous-algèbre unitaire séparante de $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ est dense.

1.4.27 EXEMPLE. Soit X un compact de $\mathbb{R}^d$ et A l'ensemble des fonctions polynomiales (en d variables) de X dans $\mathbb{R}$,

$$A = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_d].$$

Il est clair, que A est une algèbre unitaire. Si $x \neq y$, alors il existe $j \in \{1, \ldots, d\}$ tel que $x_j \neq y_j$, d'où X_j prend des valeurs différente en x et y, donc A est séparante et ainsi, d'après le théorème de Stone-Weierstrass, A est dense dans $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$.

1.4.28 REMARQUE
Ce résultat n'est plus valable, si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$. Par exemple, si $X = \overline{D}$ est le disque unité fermé de $\mathbb{C}$, la sous-algèbre unitaire séparante des (restrictions à $\overline{D}$) des polynômes complexes n'est pas dense dans $\mathscr{C}(\overline{D}, \mathbb{C})$, son adhérence est l'ensemble de toutes les fonctions holomorphes de D dans $\mathbb{C}$, donc l'ensemble des fonctions analytiques sur D, qui est strictement contenu dans $\mathscr{C}(\overline{D}, \mathbb{C})$. Par exemple, la restriction à $\overline{D}$ de la fonction $z \to \bar{z}$ n'est pas dans cette adhérence.

Un autre exemple, soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. L'ensemble A des fonctions polynomiales de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$ est une algèbre unitaire et séparante, mais n'est pas dense dans $\mathscr{C}(\mathbb{U}, \mathbb{C})$. En effet, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{2\pi} e^{int} e^{it}\, dt = 0$, d'où pour tout $f \in A$, $\int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{it}\, dt = 0$. En prenant la limite uniforme, on aura $\int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{it}\, dt = 0$, pour tout $f \in \bar{A}$. Mais pour la fonction $g : z \mapsto \bar{z}$, on a $\int_0^{2\pi} g(e^{it}) e^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} e^{-it} e^{it}\, dt = 2\pi$. Donc $g \notin \bar{A}$ c-à-d A n'est pas dense dans $\mathscr{C}(\mathbb{U}, \mathbb{C})$.

Ces exemples montrent la nécessité de rajouter, à la sous-algèbre unitaire séparante, l'hypothèse de stabilité par *conjugaison*.

1.4.29 THÉORÈME (THÉORÈME DE STONE-WEIERSTRASS (VERSION COMPLEXE))
Soit X un espace topologique compact. Toute sous-algèbre A unitaire, séparante et stable par conjugaison (i.e. $f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A$) de $\mathscr{C}(X, \mathbb{C})$ est dense.

Démonstration: Soit l'ensemble $A_{\mathbb{R}} = \{f \in A : f(x) \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } x \in X\}$, alors clairement $A_{\mathbb{R}}$ est une sous-algèbre unitaire de $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$. Montrons que $A_{\mathbb{R}}$ est séparante. Si $x \neq y \in X$, soit $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Alors $\mathrm{Re}f(x) \neq \mathrm{Re}f(y)$ ou $\mathrm{Im}f(x) \neq \mathrm{Im}f(y)$. Comme $\mathrm{Re}f$ et $\mathrm{Im}f$ appartiennent à $A_{\mathbb{R}}$, le résultat en découle. Maintenant, soit $f \in \mathscr{C}(X, \mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$, on peut trouver f_1 et f_2 dans $A_{\mathbb{R}}$ telles que $\sup_{x \in X} |\mathrm{Re}(f)(x) - f_1(x)| < \varepsilon$ et $\sup_{x \in X} |\mathrm{Im}(f)(x) - f_2(x)| < \varepsilon$, ainsi $\sup_{x \in X} |f(x) - (f_1 + i f_2)(x)| < 2\varepsilon$ avec $f_1 + i f_2 \in A$, ce qu'il fallait démontrer.

1.4.31 EXEMPLE. Soit X un compact de $\mathbb{C}^d$ et A l'ensemble des fonctions polynomiales (en z_i et $\bar{z}_i$) de X dans $\mathbb{C}$

$$A = \mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_d, \bar{Z}_1, \ldots, \bar{Z}_d].$$

A est dense dans $\mathscr{C}(X, \mathbb{C})$. En particulier, si $d = 1$ et $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ on voit que A est le sous-espace engendré par les fonctions $z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration: (du théorème de Stone-Weierstrass (version réelle))
On commence par trois lemmes.

1.4.33 LEMME
Si A est une sous-algèbre unitaire séparante de $\mathscr{C}(X,\ \mathbb{R})$, alors pour tous points distincts $x,\ y$ de X et pour tous $\alpha,\ b$ dans $\mathbb{R}$, il existe f dans A telle que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = b$.

Démonstration: Soit g dans A tel que $g(x) \neq g(y)$. Alors, puisque A est une sous-algèbre unitaire,

$$f = \alpha + \frac{b-\alpha}{g(y)-g(x)}(g - g(x))$$

convient. ■

1.4.35 LEMME
La fonction $\sqrt{t}$ sur $[0,1]$ est limite uniforme de polynômes réels en t.

Démonstration: Construisons par récurrence une suite de polynômes réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $P_0(t) = 0$ et

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2)$$

Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, montrons que $P_k \geq P_{k-1}$ sur $[0,1]$ si $k \geq 1$ et que $P_k(t) \leq \sqrt{t}$ sur $[0,1]$. En effet, le résultat est vrai pour $k = 0$. Soit $n \geq 1$, et supposons le résultat vrai au rang n. Montrons qu'il est vrai au rang $n+1$. On a $P_n(t)^2 \leq t$ et $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2) \geq P_n(t)$. De plus,

$$P_{n+1}(t) - \sqrt{t} = (P_n(t) - \sqrt{t})(1 - \frac{1}{2}(P_n(t) + \sqrt{t}))$$

Le premier facteur du membre de droite de cette inégalité est négatif ou nul. Le second terme est au moins $1 - \sqrt{t}$, qui est positif sur $[0,1]$. Donc $P_{n+1} \leq \sqrt{t}$ sur $[0,1]$.

Pour tout $t \in [0,1]$, la suite croissante majorée $(P_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[0,\ \sqrt{t}]$ converge vers $f(t) \geq 0$, qui vérifie par passage à la limite $f(t) = f(t) + \frac{1}{2}(t - f(t)^2)$. D 'où $f(t) = \sqrt{t}$. Par le théorème de Dini 1.4.7, la convergence simple de P_n vers f est en fait uniforme. ■

1.4.37 LEMME
Soit A une sous-algèbre unitaire de $\mathscr{C}(X,\ \mathbb{R})$ pour X un espace compact. Si $f \in A$, *alors* $|f| \in \overline{A}$.
De plus, pour tous $f_1,\ \ldots,\ f_k$ dans A, les applications $\min\{f_1,\ \ldots,\ f_k\}$ et $\max\{f_1,\ \ldots,\ f_k\}$ appartiennent à $\overline{A}$.

Démonstration: L'application f est continue sur le compact X, donc est bornée. Par invariance par multiplication externe, on peut donc se ramener au cas où $-1 \leq f \leq 1$. Alors $0 \leq f^2 \leq 1$, et en utilisant les polynômes P_n ci-dessus (1.4.35), les éléments $P_n(f^2)$ de A convergent uniformément sur X vers $\sqrt{f^2} = |f|$.
Le dernier résultat découle alors (par récurrence) du fait que
$\min\{u,\ v\} = \frac{1}{2}(u + v - |u - v|)$ et $\max\{u,\ v\} = \frac{1}{2}(u + v + |u - v|)$. ■

Revenons maintenant à la preuve du théorème de Stone-Weierstrass. Soient $f \in \mathscr{C}(X,\ \mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. On va construire $g \in \overline{A}$ telle que $\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| < \epsilon$, en deux étapes.

$\boxed{\text{Etape 1 :}}$ Montrons tout d'abord que pour tout x dans X, il existe $g_x \in \overline{A}$ tel que $g_x(x) = f(x)$ et $g_x(y) < f(y) + \epsilon$ pour tout y dans X.
Pour tout y dans X, il existe h_y dans A tel que $h_y(x) = f(x)$ et $h_y(y) < f(y) + \frac{\epsilon}{2}$.
En effet, en prenant $h_y = f(x)$ si $y = x$ et sinon, par le lemme1.4.33, un élément h_y de A tel que $h_y(x) = f(x)$ et $h_y(y) = f(y)$.
Par continuité de $h_y - f$ en y, il existe un voisinage ouvert U_y de y tel que $h_y(z) < f(z) + \epsilon$ pour tout z dans U_y. Par compacité de X, on peut recouvrir X par $\{U_{y_1},\ \ldots,\ U_{y_k}\}$.
Alors $g_x = \min\{h_{y_1},\ \ldots,\ h_{y_k}\}$, qui appartient à $\overline{A}$ par le 1.4.37, convient.

$\boxed{\text{Etape 2 :}}$ Maintenant, pour tout x dans X, par continuité de $g_x - f$ en x, il existe un voisinage V_x de x tel que $g_x(y) > f(y) - \epsilon$ pour tout y dans V_x. Par compacité de X, on recouvre X par $\{V_{x_1},\ \ldots,\ V_{x_m}\}$. Posons $g = \max\{g_{x_1},\ \ldots,\ g_{x_m}\}$, qui appartient à $\overline{A}$ par le 1.4.37 et vérifie $g(y) < f(y) + \epsilon$ pour tout y dans X, par les propriétés des g_x. Pour tout y dans X, soit $j \in \{1,\ \ldots,\ m\}$ tel que $y \in V_{x_j}$. Alors $g(y) \geq g_{x_j}(y) > f(y) - \epsilon$. Donc $|g(y) - f(y)| < \epsilon$ pour tout y dans X, ce qui montre le résultat. ■

Le cas particulier (classique)

1.4.39 COROLLAIRE (THÉORÈME DE WEIERSTRASS)

L'ensemble des restrictions à $[0, 1]$ des applications polynomiales réelles est dense dans $\mathscr{C}([0, 1],\ \mathbb{R})$.

Notons que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, l'algèbre des applications polynomiales en n variables à coefficients réels (resp. complexes) est une sous-algèbre unitaire séparante (resp. séparante et stable par conjugaison) de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{C})$), car si $x \neq y$, alors, il existe $i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ tel que $x_i \neq y_i$, et par exemple, l'application i-ème coordonnée est une application polynomiale qui sépare x et y. On a le résultat suivant.

1.4.40 COROLLAIRE

Soient $n \in \mathbb{N}$, X une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathscr{C}(X,\ \mathbb{R})$ (resp. $f \in \mathscr{C}(X,\ \mathbb{C})$). Alors f est limite uniforme sur X d'une suite d'applications polynomiales en n variables à coefficients réels (resp. complexes).

1.4.41 COROLLAIRE

Soit X un compact de $\mathbb{K}^n$. Alors $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ est séparable.

Démonstration: D'après le corollaire précédent $\mathbb{K}[X]$ est dense dans $\mathscr{C}(X,\ \mathbb{K})$.

D'après la densité $\mathbb{Q}[X]$ (resp. $(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})[X]$) est dense dans $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ (resp. dans $\mathscr{C}(X, \mathbb{C})$.) D'autre part, $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$ et $\mathbb{Q}_n[X]$ est isomorphe (sur $\mathbb{Q}$) à $\mathbb{Q}^{n+1}$, d'où $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable comme toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables. Il en est de même pour $(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})[X]$.

Ainsi $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ est séparable. ∎

Notons $\mathscr{C}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ la sous-algèbre unitaire de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ formée des applications 2π- périodiques.

1.4.43 DÉFINITION

Un *polynôme trigonométrique* est une application (2π-périodique) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx},$$

où $\alpha_k \in \mathbb{C}$ pour tout $k \in \{-n, \dots, n\}$.

1.4.44 PROPOSITION

L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $\mathscr{C}_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Démonstration: Notons X l'espace topologique quotient $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, qui est compact (voir TD) et $p : \mathbb{R} \to X$ la projection canonique. Soit Φ l'application de $\mathscr{C}(X,\ \mathbb{C})$ dans $\mathscr{C}_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ définie par $\Phi(f) = f \circ p$. Alors Φ est un isomorphisme d'algèbres unitaires complexes.

En effet, Φ est surjective, car une application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et 2π-périodique, induit par passage au quotient une application $f : X \to \mathbb{C}$ qui est continue et vérifie $f \circ p = g$. De plus, Φ est une isométrie pour les normes uniformes, en effet :

$d_\infty(\Phi(f), \Phi(g)) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f \circ p(t) - g \circ p(t)| = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| = d_\infty(f, g)$.
L'ensemble des polynômes trigonométriques est une sous-algèbre unitaire, stable par conjugaison, de $\mathscr{C}_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Sa préimage par ϕ est une partie séparante de $\mathscr{C}(X, \mathbb{C})$, car si $x, y \in \mathbb{R}$ et $x \neq y \bmod 2\pi$, alors $e^{ix} \neq e^{iy}$. En obtient le résultat, en appliquant le théorème de Stone-Weierstrass (version complexe). ∎

1.4.46 Corollaire
$\mathscr{C}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est séparable.

Donnons une dernière application du théorème de Stone-Weierstrass.

1.4.47 Proposition
Soient X et Y deux espaces topologiques compacts et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'ensemble des applications à variables séparées, i.e. de la forme

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=0}^{n} f_i(x) g_i(y)$$

où $n \in \mathbb{N}$, $f_i \in \mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ et $g_i \in \mathscr{C}(Y, \mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{C}(X \times Y, \mathbb{K})$. Ainsi tout élément de $\mathscr{C}(X \times Y, \mathbb{K})$ est limite uniforme d'applications à variables séparées.

Démonstration: L'ensemble des applications à variables séparées est clairement une sous-algèbre unitaire, stable par conjugaison si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, de $\mathscr{C}(X \times Y, \mathbb{K})$.

Soient (x_0, y_0), (x_1, y_1) deux éléments distincts de $X \times Y$. Supposons par exemple que $x_0 \neq x_1$. D'après le lemme d'Urysohn, il existe une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $f(x_0) \neq f(x_1)$. En posant $F : (x, y) \mapsto F(x,y) = f(x)$, on aura $F(x_0, y_0) \neq F(x_1, y_1)$. La sous-algèbre est donc séparante et on peut alors appliquer le théorème de Stone-Weierstrass. ∎